



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

И.В.Ященко, А.В.Семенов, И.Р.Высоцкий

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО
НЕКОТОРЫМ АСПЕКТАМ
СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ
ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ**

*(на основе анализа типичных затруднений выпускников при
выполнении заданий ЕГЭ)*

Москва, 2014

Общие рекомендации по совершенствованию методики преподавания и содержания курса математики в школе по итогам ЕГЭ 2014 года

Введение. Краткие итоги ЕГЭ 2014 по математике

Единый государственный экзамен по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального компонента государственных стандартов основного общего и среднего (полного) общего образования по математике, базового и профильного уровней (приказ Минобрнауки России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»). Контрольные измерительные материалы составлялись на основе кодификаторов элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2014 году ЕГЭ по математике.

В КИМ ЕГЭ по математике в 2014 году соблюдена преемственность с КИМ 2013 года – имеется незначительное расширение тематики контролируемых элементов содержания, отраженное в спецификации и демоверсии экзамена и соответствующие действующему стандарту основного общего и среднего (полного) общего образования по математике. Также добавлена одна задача в первую часть экзамена, кроме того, задания первой части были переупорядочены с целью выделения в подгруппу В1–В10 заданий базового уровня требований к подготовке участников экзамена.

Таким образом, КИМ ЕГЭ по математике в 2014 году состоял из 21 задания. Задания первой части В1–В10 базового уровня и задания В11–В15 повышенного уровня сложности с кратким ответом, задания второй части С1–С6 подразумевают развернутый ответ, включающий полное обоснованное решение. Задания С1–С4 повышенного уровня сложности, задания С5–С6 высокого уровня сложности.

Анализ результатов ЕГЭ 2014 года в данном и следующих разделах проведен в основном в сравнении с результатами экзамена 2012 года. В таблице 1 показано распределение первичных баллов, шкала перевода первичных баллов в 100-балльную шкалу (тестовый балл), накопленный процент выполнения (рейтинг) в 2012 и в 2014 гг.

Табл. 1. Сравнение распределения первичных баллов 2012 и 2014 гг.

Первичный балл	Тестовый балл 2014 года	Процент выполнения 2014 г.	Тестовый балл 2012 года	Процент выполнения 2012 г.	Накопл. процент выполнения	
					2014 г.	2012 г.
0	0	0,79%	0	0,58%	0,79%	0,58%
1	7	1,66%	5	1,05%	2,45%	1,64%
2	13	2,94%	10	1,67%	5,39%	3,30%
3	20	4,59%	15	2,42%	9,98%	5,72%
4	24	6,30%	20	3,41%	16,27%	9,14%
5	28	7,65%	24	4,81%	23,93%	13,95%
6	32	8,66%	28	6,38%	32,59%	20,33%
7	36	8,82%	32	7,38%	41,40%	27,71%
8	40	8,62%	36	8,14%	50,02%	35,86%
9	44	8,07%	40	8,57%	58,10%	44,43%
10	48	7,27%	44	8,78%	65,37%	53,21%
11	52	6,29%	48	8,70%	71,65%	61,91%
12	56	5,36%	52	8,26%	77,02%	70,16%
13	60	4,61%	56	7,51%	81,62%	77,68%
14	64	3,93%	60	6,32%	85,56%	84,00%
15	68	3,32%	63	4,90%	88,88%	88,90%
16	70	2,81%	66	3,77%	91,69%	92,68%
17	72	2,24%	68	2,31%	93,93%	94,98%
18	73	1,66%	70	1,45%	95,59%	96,44%
19	75	1,23%	72	1,06%	96,82%	97,49%
20	77	0,96%	74	0,68%	97,79%	98,18%
21	79	0,67%	77	0,51%	98,45%	98,69%
22	80	0,48%	79	0,35%	98,93%	99,04%
23	82	0,32%	81	0,27%	99,26%	99,32%
24	84	0,22%	83	0,20%	99,47%	99,52%
25	86	0,16%	85	0,16%	99,63%	99,68%
26	88	0,10%	87	0,12%	99,74%	99,80%
27	89	0,08%	90	0,08%	99,82%	99,88%
28	91	0,06%	92	0,05%	99,88%	99,93%
29	93	0,04%	94	0,03%	99,92%	99,96%
30	95	0,03%	96	0,02%	99,95%	99,98%
31	96	0,02%	98	0,01%	99,98%	99,99%
32	98	0,01%	100	0,01%	99,99%	100,00%
33	100	0,01%			100,00%	

Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ 2014 года по математике проводился с учетом наличия различных групп участников экзамена. Высокая неоднородность состава участников обязательного экзамена по математике проявляется и в математической подготовке, и в определении целей и стратегии поведения на экзамене.

Низкая мотивация учащихся к приобретению математических знаний связана с общественной недооценкой значимости математического образования, а также с единством программных требований и отсутствием конкурентной образовательной среды.

В то же время способные учащиеся интеллектуально недогружены, уровень их итоговой подготовки ниже, чем должен быть.

К окончанию 9 класса значительная часть учащихся (по разным оценкам от 20% до 40%) по сформированности учебных компетенций остается на уровне 5–7 классов. От 30% до 50% (в разных регионах) выпускников основной школы (9 класс) не готовы к дальнейшему обучению. Перейдя в старшую школу, они фактически не занимаются математикой, поскольку не имеют ни необходимого фундамента, ни мотивации.

В технические ВУЗы поступают и выпускники, едва перешагнувшие аттестационный рубеж государственной итоговой аттестации по математике.

Ключевой проблемой качества школьного математического образования остается неэффективность использования учебных часов. Школьная администрация и учителя не имеют ни оснований, ни практической возможности заниматься дифференциацией учащихся, выстраиванием групповых учебных траекторий и программ. В результате учитель на уроке работает в интересах «прохождения программы», а не в интересах математического образования. Простое увеличение числа учебных часов математики не решит ни содержательные, ни мотивационные проблемы. При разработке учебников и рабочих программ в соответствии с новыми федеральными государственными образовательными стандартами основного и среднего (полного) образования необходимо учитывать различия в целях образования различных групп учащихся.

Характеристика проблем математического образования дана в Концепции развития математического образования в Российской Федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р) и в комплексе мер по ее реализации, утвержденных приказом Минобрнауки России от 03.04.2014 № 265 «Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р».

В области среднего образования важно отметить выделение направлений в требованиях к результатам математического образования, ориентированных на различные образовательные запросы учащихся. Это требует, в том числе, перехода к новому экзамену по математике, проходящему не менее чем на двух уровнях требований. Для различных целевых групп экзамен должен предлагать различные контрольные измерительные материалы, более точно отвечающие

выбранному направлению образовательной траектории учащегося, уровню его подготовки.

Анализ выполнения ЕГЭ 2014 года различными группами участников экзамена

На протяжении ряда лет кластерный анализ результатов экзамена позволяет выделить относительно однородные группы участников экзамена, обладающих примерно одинаковым уровнем подготовки и – отчасти – близкими образовательными запросами.

Результаты 2014 года, благодаря повышению объективности экзамена, позволили пересмотреть количественный состав выделенных групп¹, данный в таблице 2. При этом качественный состав групп остался прежним, что потребовало некоторого изменения границ (в первичных баллах) при определении групп.

В группу I попадают экзаменуемые, фактически не овладевшие математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающие значительное число ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи. В этом году около 23,9% участников попали в эту группу, что незначительно превышает экспертные оценки прошлых лет (20% неуспевающих в X–XI классах). В 2012 году к I группе было отнесено только 13,9% выпускников школ.

Табл. 2. Группы выпускников с различным уровнем подготовки

Группа	Перв. балл (2014/2012) ²	Характеристика группы	Численность группы 2014 года	Процент участников (2014/2012)
I (низкий)	Не более 5	Выпускники, не обладающие математическими умениями на базовом, общественно значимом уровне	168 143	23,9 / 13,9
II (базовый)	6–10	Выпускники, освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям	291 193	41,4 / 39,2
III	11–14	Выпускники, успешно освоившие	141 872	20,2 / 30,8

¹ Деление на группы условное: границы групп не являются четкими.

² Различия в границах первичных баллов для групп обусловлены различием в структуре экзаменов 2012 и 2014 гг.

(базовый)		базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие шансы на переход в следующую группу по уровню подготовки. Фактически могут быть зачислены на технические специальности большинства вузов		
IV (повышенный)	15–23	Выпускники, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенного и высокого уровней математической компетентности	96 258	13,7 / 15,3
V (высокий)	24 и выше	Выпускники, имеющие уровень подготовки, достаточный для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к уровню математической компетентности	5224	0,7 / 0,68

Группы II и III наиболее массовые, в них входят участники экзамена, успешно освоившие курс математики полной (средней) школы на базовом уровне, но зачастую не имеющие мотивации для более углубленного изучения математики. В частности, выпускники, планирующие продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук, обычно распределяют свои усилия соответствующим образом. Однако с учетом задач, стоящих перед страной, учителям следует обратить большее внимание на эту группу в целях выделения учащихся, не имеющих четких мотиваций или испытывающих определенные затруднения, которые хотели бы освоить математику на более высоком уровне. Поэтому представляет некоторый интерес выделение в указанной группе подгруппы III «ближайшего резерва».

Заметим, что доля основной группы II практически не изменилась, зато группа III стала менее обширной, чем раньше.

Группа IV – это в основном абитуриенты технических вузов. Отметим, что их число заметно меньше количества бюджетных мест по техническим специальностям. Фактически, в последние годы на технические специальности, а также на специальность «учитель математики» зачисляются выпускники из группы III. Доля группы IV очень неравномерна по регионам, в ряде регионов катастрофически низкая, что не позволяет организовать эффективную подготовку необходимых кадров для экономик регионов. Недостаточная доля группы IV связана в том числе и с системными проблемами, такими как недостаточная мотивация учащихся к серьезному изучению математики, низкая

(в течение долгого времени) привлекательность инженерных профессий, резкое снижение (в ряде регионов) доли классов, с количеством часов математики 5 и более в неделю.

Группа V – это контингент абитуриентов физико-математических специальностей ведущих университетов и технических вузов, а также престижных экономических вузов. Состав этой группы во многом формируется выпускниками специализированных математических школ и классов, осуществляющих традиционно высокий уровень преподавания. Количество часов математики обычно не менее 7. Специализация зачастую начинается в 8–9 классах. Количественный состав группы в целом соответствует запросам вузов в настоящий момент. Однако распределение участников этой группы по регионам крайне неравномерно, что связано не только с наличием или отсутствием специализированных школ в регионе, но и с особенностями работы органов управления образованием. Требуется развитие системы работы с одаренными детьми в области математики, особенно в сельской местности, расширение сети математических школ и классов, в том числе и интернатного типа, целевая поддержка педагогов, работающих с одаренными детьми, развитие дистанционных форм работы и нормативной базы для такой работы.

Ниже приведен детальный анализ результатов выполнения экзаменационной работы выпускниками с различным уровнем математической подготовки. В таблице 3 приведены данные выполнения заданий с кратким ответом (части 1 и 2) по каждой группе выпускников с различным уровнем подготовки.

Табл. 3. Выполнение заданий B1–B15 группами выпускников (%)

Группа	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	
I (низкий)	68,2	34,5	81,0	54,7	18,5	16,2	34,5	8,2	15,4	7,2	2,3	3,9	3,7	2,5	2,3	
Базовый	Общ.	93,2	78,9	96,5	85,0	74,2	65,7	86,3	58,2	46,2	48,1	20,0	49,7	43,6	24,0	23,3
	II	92,0	75,2	96,0	82,4	67,0	58,4	82,0	47,4	36,6	36,8	11,7	36,3	30,0	13,2	13,3
	III	95,7	86,5	97,6	90,3	89,0	80,8	94,9	80,3	65,8	71,2	37,1	77,2	71,5	46,4	43,8
IV (повыш.)	97,7	92,0	98,5	93,8	96,2	90,8	98,0	92,4	87,5	88,4	73,8	92,4	89,7	77,5	73,0	
V (высокий)	98,8	95,0	98,5	95,2	99,0	97,5	99,0	98,7	95,1	98,0	95,9	97,5	98,1	92,9	87,8	
Общее вып.	87,9	70,2	93,1	79,0	64,1	57,5	75,6	51,2	44,8	44,2	23,7	44,9	40,8	26,7	25,6	

Приведенные данные показывают, что выпускники с повышенным и высоким уровнями подготовки освоили базовые требования, проверяемые заданиями первой части, и их ошибки в выполнении заданий не превосходят естественного случайного фона. Данный вывод подтверждается высокими

результатами выпускников этих групп и небольшими колебаниями результатов по отдельным заданиям.

Результаты выпускников с базовым уровнем подготовки неоднородны. Это видно после разделения базовой группы на две подгруппы II и III – отношение результатов по разным заданиям значительно колеблется.

Обращает на себя внимание значительная разница в результатах подгрупп II и III базового и повышенного уровней по заданиям В8–В15. Все эти задания, кроме одного-двух, соответствуют учебному материалу 10–11 классов. Таким образом, подгруппа II усваивает материал курса математики старшей школы значительно хуже, чем подгруппа III. Задание В14 требует составления математической модели по данным текстовой задачи и здесь сильно сказывается разница в общей математической культуре между подгруппами.

В экзамене присутствует алгоритмическое задание В12; оно проверяет компетенцию в области выполнения предложенных, но не заученных алгоритмов. И здесь подгруппа II показывает значительно более низкий результат 36,3% против 77,2% у подгруппы III. Кстати, результаты выполнения этого задания значительно выше, чем в 2012 и 2013 годах.

Все указанные особенности имели место и в 2012–2013 гг. Таким образом, качественно картина не изменилась.

Среди участников ЕГЭ по математике с низким уровнем подготовки характерно разделение между относительно высокими показателями в заданиях В1, В3, В4 и низкими показателями выполнения прочих заданий. Тревогу вызывает то, что задание В2 (проценты) для группы I оказалось крайне сложным (34,5%). По сути, экзаменуемые этой группы более-менее справились только с практико-ориентированными заданиями, т. е. фактически учащиеся этой группы имеют существенные пробелы даже в знании материала основной школы.

Перейдем к результатам выполнения заданий с развернутыми ответами части 2. Таблица 4 показывает общее выполнение заданий второй части участниками экзамена (без группировки).

Таблица 4. Общие результаты выполнения заданий С1–С6 (с данными 2012 г)

Балл	С1		С2		С3		С4		С5		С6	
	2014	2012	2014	2012	2014	2012	2014	2012	2014	2012	2014	2012
1	8,3%	10,0%	2,4%	4,5%	12,1%	7,6%	2,1%	1,7%	1,4%	3,7%	4,8%	5,5%
2	15,4%	25,4%	2,2%	4,9%	1,0%	2,0%	0,1%	2,7%	0,2%	0,8%	1,5%	1,9%
3	-	-	-	-	4,1%	5,1%	0,7%	3,1%	0,1%	0,6%	0,3%	0,6%
4	-	-	-	-	-	-	-	-	0,2%	1,1%	0,2%	0,5%

Таблица 5 содержит данные о выполнении заданий второй части выпускниками по группам.

Табл. 5. Выполнение заданий С1–С6 группами выпускников (%)

Группа	С1				С2				С3					С4					
	нет	0	1	2	нет	0	1	2	нет	0	1	2	3	нет	0	1	2	3	
I	85,9	99,5	0,4	0,0	91,2	100,0	0,0	0,0	93,5	99,9	0,1	0,0	0,0	94,1	100,0	0,0	0,0	0,0	
Базовый	Общ.	45,2	82,3	10,1	7,6	62,0	99,0	0,9	0,1	70,3	90,6	8,9	0,3	0,2	87,1	99,4	0,6	0,0	0,0
	II	58,9	93,7	4,9	1,4	73,7	99,7	0,3	0,0	81,0	97,6	2,4	0,0	0,0	89,5	99,8	0,2	0,0	0,0
	III	17,0	59,0	20,7	20,4	37,9	97,5	2,3	0,3	48,3	76,2	22,4	0,7	0,7	82,3	98,6	1,4	0,0	0,0
IV	1,7	12,5	14,2	73,3	8,3	75,9	12,4	11,6	10,7	22,3	47,4	5,9	24,4	59,3	86,3	11,3	0,6	1,8	
V	0,2	2,3	4,6	93,1	1,2	11,1	15,2	73,7	0,8	1,0	12,0	3,9	83,2	5,5	14,1	27,6	4,7	53,7	

Группа	С5						С6					
	нет	0	1	2	3	4	нет	0	1	2	3	4
I	87,9	99,9	0,1	0,0	0,0	0,0	73,7	99,7	0,3	0,0	0,0	0,0
Базовый	Общ.	80,0	99,5	0,5	0,0	0,0	36,4	95,7	3,7	0,5	0,0	0,0
	II	82,5	99,8	0,2	0,0	0,0	47,4	97,7	2,2	0,2	0,0	0,0
	III	74,7	99,0	1,0	0,0	0,0	0,0	13,8	91,8	6,8	1,3	0,1
IV	53,7	92,0	7,0	0,7	0,1	0,2	6,4	75,1	16,6	6,7	1,2	0,5
V	5,9	34,4	26,1	14,8	5,5	19,2	2,6	15,5	21,0	30,1	14,7	18,6

Данные показывают, что подавляющее большинство участников экзамена из групп IV и V получили баллы за выполнение задания С1 (87,5% и 97,7% соответственно, что примерно повторяет результат прошлого года), в то время как для групп II и III с базовой подготовкой этот показатель – 17,7% (20,0% в 2013 г.). Это подтверждает то, что задание С1, аналогичное типичным заданиям на первых позициях вступительных экзаменов технических вузов, характеризует готовность участников ЕГЭ по математике к продолжению образования в технических и экономических вузах.

Характер выполнения следующего задания С2 (стереометрия) хорошо дифференцирует выпускников групп IV и V: ненулевой балл достигли 24,0% и 88,9% участников соответственно (в 2013 году 40,7% и 94,2% участников).

Задание С3 (система неравенств) по сравнению с геометрическим заданием С2 для участников IV группы оказалось легче: 24,0% по С2 и 77,7% по С3 (40,7% по С2 и 50,4% по С3 – в 2013 году). Следовательно, даже для выпускников с весьма высоким уровнем подготовки алгебраическая составляющая школьного курса математики доминирует над геометрической. Аналогичная ситуация наблюдалась и в прошлые годы.

В группе V с наиболее высокой подготовкой это явление наблюдалось впервые: для данной группы эти показатели равны 88,9% и 99,0% (94,2% и 96,9% в 2013 г.).

В группе экзаменуемых с базовой подготовкой ненулевых баллов 1,0% за C2 и 9,4% за C3. В 2013 году эти показатели были 1,5% за C2 и 3,6% – за C3 соответственно. То есть, учащиеся с базовой подготовкой в целом лучше справились с заданием C3 в 2014 году.

Доминирование подготовки по алгебре над геометрией проявляется у подавляющего большинства участников экзамена.

Наиболее значимая дифференциация участников с высоким уровнем математической подготовки происходит при выполнении заданий C4–C6.

Сравним результаты участников разных групп при выполнении практико-ориентированных заданий, заданий по алгебре и началам анализа и заданий по геометрии основной и старшей школы (табл. 6). Сравнение построим таким образом, чтобы видеть вклад группы заданий в общее число баллов, полученное участниками группы³. Этот показатель должен учитывать количество заданий в группе. К практико-ориентированным заданиям относятся шесть заданий B1 – B4, B6 и B12. Шесть заданий B5, B8, B10, B13, C2 и C4 – геометрические. Девять заданий B7, B9, B11, B14, B15, C1, C3, C5 и C6 относятся к заданиям по алгебре и началам анализа.

Таблица 6. Приведенный вклад различных заданий в общий балл по группам

Группа		Практико-ориентированные	Алгебра и начала анализа	Геометрия
I		85,3%	6,4%	8,3%
Базовый	II	71,3%	9,2%	19,6%
	III	60,9%	14,8%	24,3%
IV		51,6%	22,8%	25,6%
V		38,5%	28,2%	33,3%

Наиболее слабая группа получает свои баллы в основном за практико-ориентированные задания (85,3%). Даже для IV группы относительный вклад практико-ориентированных заданий значительно превышает треть (51%).

³ Показатели составлены таким образом, что у участников, верно решивших все задания, показатели вкладов по 33,3%. Результаты 85,3%, 6,4% и 8,3% у I группы следует понимать: если бы суммарный балл за задания разных типов был одинаков, то на 853 балла, полученных за практико-ориентированные задачи в среднем приходилось бы 64 балла за алгебру и 83 балла за геометрию.

Вклад геометрии выше, чем вклад алгебры и анализа по всем группам. Разница особенно заметна для базовых групп. Это объясняется наличием наглядных заданий по геометрии, которые можно выполнить, опираясь лишь на картинку и здравый смысл.

Чем более подготовлена группа, тем меньше рассеивание показателей.

Проведем аналогичное сравнение групп заданий по двум группам заданий – основной и старшей школы (табл. 7). Показатели здесь построены так же⁴.

Таблица 7. Приведенный вклад заданий основной и старшей школы

Группа		Основная школа	Старшая школа
I		82,2%	17,8%
Базовый	II	73,3%	26,7%
	III	62,8%	37,2%
IV		52,5%	47,5%
V		50,1%	49,9%

Анализ приведенных вкладов подтверждает тезис о том, что выпускники группы I практически не овладевают материалом старшей школы. Видно, что они получают баллы в основном за счет заданий основной школы.

Краткие выводы

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что существенная часть текущего школьного курса математики не осваивается значительным количеством учащихся, требуется существенная перестройка содержания школьной математики, причем эта перестройка должна учитывать индивидуальные образовательные запросы и возможности различных целевых групп учащихся. Отметим, что низкий уровень математической подготовки, не позволяет учащимся успешно осваивать другие предметы естественно-научного цикла, резко снижает общую способность учиться.

Математическое образование в школе, деятельность учителей и организаторов образования должны исходить из того, что

⁴ У участников, верно решивших все задания, показатели вкладов по 50%. Показатели также учитывают максимальное суммарное количество баллов в каждой группе.

- каждый учащийся должен получать математические знания в соответствии с его способностями и выбранными направлениями требований к результатам математического образования, достаточные для успешной жизни в обществе;
- каждому ученику должна быть предоставлена возможность получения математических компетенций, достаточными для применения математики в технике и социально-экономических областях;
- каждому ученику, независимо от места проживания, должна быть обеспечена возможность развития математического таланта;
- каждый ученик должен быть обеспечен развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя в обучении присущую математике красоту и увлекательность.

Два уровня итоговой аттестации по математике за курс средней (полной) общеобразовательной школы позволят выпускникам с разным уровнем математической подготовки более полно реализовать свои возможности.

Задачей учителя образовательной организации является, в том числе, помощь в формировании индивидуальной траектории подготовки, с учетом текущего уровня знаний и планируемого выбора дальнейшей профессии.

Методические рекомендации для образовательных организаций по организации итогового повторения, ликвидации пробелов в знаниях учащихся, планирующих сдачу экзамена на профильном и базовом уровнях

Для организации учебного процесса образовательные организации должны учитывать наличие различных групп учащихся, имеющих различный уровень математической подготовки и различные перспективы профессиональной деятельности. В соответствии с нормативными документами рабочие программы по математике образовательных организаций должны отражать выявленную тенденцию.

Недостаточно уделять время практико-ориентированным заданиям только при итоговой подготовке. Нужно насытить рабочие программы практико-ориентированными умениями, выстроить систему изучения практической, жизненно важной математики во все школьные годы. Сюда входят элементы финансовой и статистической грамотности, умение принимать решения на основе выполненных расчетов, навыки самоконтроля с помощью оценки возможных значений физических величин на основе жизненного опыта и изучения естествознания.

В последние годы у учителей сформировалось понимание того, какие именно практико-ориентированные задания необходимо включать в повседневную работу, в большой степени этому способствуют открытые банки заданий по ОГЭ и ЕГЭ.

Проведение диагностических работ в начале учебного года позволит соотнести результаты конкретных учащихся с общими описаниями групп, приведенными выше, что поможет выработать индивидуальные траектории итогового повторения.

Организация работы с учащимися, планирующими сдачу экзамена на профильном уровне в целом аналогична организации итогового повторения к успешной сдаче ЕГЭ 2010-2014 годов

Для учащихся группы III, которые могут успешно освоить курс математики средней (полной) школы на базовом уровне, образовательный акцент должен быть сделан на полное изучение традиционных курсов алгебры и начал анализа и геометрии на базовом уровне. Помимо заданий базового уровня в образовательном процессе должны использоваться задания повышенного уровня. Количество часов математики должно быть не менее 5 часов в неделю.

Для учащихся группы IV, которые могут успешно освоить курс математики полной (средней) школы на профильном (повышенном) уровне, образовательный акцент должен быть сделан на полное изучение традиционных курсов алгебры и начал анализа и геометрии на профильном уровне. Количество часов математики должно быть не менее 6–7 часов в неделю.

Группа V. Состав этой группы во многом формируется выпускниками специализированных математических школ и классов, осуществляющих традиционно высокий уровень преподавания. Количество часов математики обычно не менее 7–8 часов в неделю.

В первую очередь нужно выработать у обучающихся быстрое и правильное выполнение заданий части 1, используя, в том числе и банк заданий экзамена базового уровня. Умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня, должны быть под постоянным контролем.

Задания с кратким ответом (повышенного уровня) части 2 должны находить отражение в содержании математического образования, и аналогичные задания должны включаться в систему текущего и рубежного контроля.

При оформлении решений заданий с развернутым ответом нужно особое внимание обращать на правильные чертежи, лаконичность пояснений, доказательность рассуждений и аргументированность решений.

Организация работы с учащимися, планирующими выполнение экзаменационной работы только на базовом уровне

Остановимся на работе с такими учащимися более подробно.

Для учащихся группы I, фактически не овладевших математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающих значительное число ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи, образовательный акцент должен быть сделан на формирование базовых математических компетентностей. Учащиеся этой группы будут иметь возможность сдавать экзамен по математике на базовом уровне. Эта группа учащихся должна быть под особым контролем образовательной организации. Для контроля формирования математических компетентностей обычно используют диагностические карты. Для учащихся этой группы учебный материал старшей школы должен даваться обзорно. Дополнительно потребуется не менее 2–3 часов в неделю для ликвидации проблем в базовых

предметных компетенциях. Общее количество часов математики должно быть не менее 5 часов в неделю.

Для учащихся группы II, фактически слабо овладевших математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающих большое число ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи, образовательный акцент так же должен быть сделан на формирование базовых математических компетентностей. Учащиеся этой группы будут иметь возможность сдавать экзамен по математике на базовом уровне. Для этой группы учащихся обучение может быть таким же, как и для учащихся группы I. В зависимости от уровня математической подготовки учащиеся этой группы могут изучать в более полном объеме традиционные курсы алгебры и начал математического анализа и геометрии. Количество часов математики должно быть не менее 5 часов в неделю.

Для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся названных категорий следует различными диагностическими процедурами выявить 9–12 заданий экзамена базового уровня, которые учащийся может выполнить, возможно, с ошибками, и в процессе обучения добиться стабильного выполнения этих заданий. Расширять круг этих заданий следует поэтапно.

Эта работа может быть организована для различных групп учащихся одного класса на разных уровнях в урочной и внеурочной работе.

В обучении учащихся, имеющих значительные пробелы в знаниях и слабые вычислительные навыки, программа обучения должна быть сориентирована на компенсирующее обучение по курсу математики основной школы.

Для учащихся, которые относятся к группам III–V, экзамен на базовом уровне может расцениваться как тренировка, способ обрести психологическую уверенность перед последующим экзаменом профильного уровня. В этом случае следует довести выполнения заданий базового уровня до автоматизма, что позволит избежать, в том числе, технических ошибок при выполнении заданий профильного уровня.

Для учащихся, которые имеют достаточно высокий (группы III–V) уровень подготовки, но не планируют сдачу экзамена профильного уровня, при подготовке к экзамену базового уровня, следует делать больший акцент на решение задач 18–20, с целью развития мышления учащегося, а также уделить

внимание формированию представления об общекультурной роли математики, развитию наглядных геометрических представлений.

Для организации итогового повторения задания базового уровня можно условно разбить на следующие тематические блоки.

- Задачи на вычисления (задания 1, 2).

Задание 1: арифметические действия с обыкновенными и десятичными дробями, с целыми отрицательными числами. Для успешного выполнения такого типа заданий учащимся необходимо добиться правильного выполнения действий сложения, вычитания, умножения и деления дробей (десятичных и обыкновенных) и отрицательных чисел. Такие задания должны быть на каждом уроке.

Задание 2: действия со степенями с целым показателем, стандартный вид числа. Следует обратить внимание на то, что все правила действий со степенями даны в справочных материалах. По опыту известно, что действия с числами, представленными в стандартном виде, могут вызывать у учащихся затруднения, так как в традиционных курсах на эту тему отводится недостаточное количество времени. Стоит выделить на повторение этой темы отдельные занятия.

- Простейшие алгебраические задачи (задания 4, 5, 7).

После получения стабильных результатов при выполнении заданий на вычисления можно переходить к «одно-двухходовым» уравнениям (линейным, квадратным, простейшим показательным и логарифмическим). Задания базового уровня проверяют прежде всего знание и применение стандартных алгоритмов решений уравнений. Как правило, задание № 7 оказывается посильным практически для всех учащихся при условии овладения умением проводить безошибочно (или обнаруживая и устраняя ошибки) несколько стандартных действий.

В *задаче 4* (работа с формулой) нужно подставить числовые данные в формулу. Иногда задача сводится к нахождению числового выражения, а иногда к решению линейного уравнения.

В *задаче 5* (нахождение значения выражения) требуется умение применить простейшие свойства тригонометрических, показательной и логарифмической функций. Все необходимые свойства указаны в Справочных материалах. С вычислительной стороны эта задача не представляет большой сложности.

В задаче 7 (решение уравнений) требуется умение решать линейные, квадратные, простейшие показательные, тригонометрические и иррациональные уравнения. Все необходимые свойства указаны в Справочных материалах. С вычислительной стороны это задание требует особого контроля.

- Текстовые задачи с практическим содержанием (задания 3, 6).

К решению текстовых задач можно приступать после получения устойчивых вычислительных навыков. Задание 3 относится к вычислительной задаче на проценты и части с естественной формулировкой. После подготовительной работы по нахождению процентов от числа (пропорции, процента как сотой части числа и основных типов задач на проценты) и нахождению части числа задача не должна вызывать затруднения у учащихся. Следует особо обратить внимание на такие понятия как «скидка», «наценка».

Задание 6 также является вычислительной задачей с практическим контекстом. Для ее успешного выполнения потребуется не только владение вычислительными навыками, но и умение принимать решение об округлении числа с недостатком или с избытком в соответствии с условием задачи (математические правила округления чисел часто приводят к неверному описанию реальной ситуации).

- Чтение диаграмм и графиков (задания 11, 12).

Выполнение *задания 11* не основывается на применении арифметических действий с числами, но требует умения однократного считывания информации, представленной в виде графиков, диаграмм или таблиц. Поэтому подготовку обучающихся к выполнению таких заданий, как чтение столбиковых диаграмм (нахождение наибольшего или наименьшего, определение номера по убыванию или возрастанию) или нахождение наибольшего значения по графику, можно осуществлять на каждом уроке. Важно добиться стабильного выполнения задач такого типа.

Выполнение *задания 12* основывается на правильном получении данных из таблицы, составлением нескольких наборов (с учетом выбора оптимального) и некоторым объемом вычислительной работы. Подготовка к выполнению заданий такого типа может осуществляться параллельно с решением вычислительных примеров и текстовых задач или после получения стабильных результатов при выполнении действий с числами.

Задание 17 проверяет умение сравнивать различные величины (в том числе иррациональные), не находя их точных значений, и располагать их на

числовой прямой, а также решать неравенства. Действия с координатной прямой сложны для многих учащихся, поэтому стоит начинать с самых простых заданий «отметить точку с координатами (целыми, дробными, иррациональными) на координатной прямой», «сравнить числа (целые, дробные, иррациональные) с помощью координатной прямой» и т.д.

- Геометрические задачи (задания 8, 13, 15, 16).

Задание 8 проверяет умение применять знания о геометрических объектах к решению практических задач. В демонстрационном варианте представлен набор планиметрических задач на нахождение площади или периметра многоугольника, причем в форме простой практической задачи.

Задание 13 проверяет умение решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (площадей, объемов). Необходимые для решения задачи формулы представлены в Справочных материалах. Стоит обратить внимание учеников на то, как меняются площадь или объем при изменении длины того или иного элемента (ребро куба, радиус основания цилиндра и т.д.).

Задание 15 представляет собой «двухходовую» планиметрическую задачу на основные факты курса планиметрии, за исключением тем «Векторы» и «Координаты».

Задание 16 проверяет умение решать простейшие стереометрические задачи на нахождение различных геометрических величин. Формулы для нахождения объема, площади поверхности даны в Справочных материалах.

Задание 9 проверяет знание возможных значений величин реальных объектов. Для успешного выполнения этого задания учащиеся должны уметь переводить одни единицы измерения в другие (длина, площадь, объем, масса и т.д.). Часто для решения этой задачи достаточно расположить данные задачи в порядке возрастания (убывания) и соотнести величины и их возможные значения.

Задание 18 проверяет сформированность у учеников общей логической культуры. Для получения логической цепочки не требуется применение вычислительных навыков.

Задание 10 (по теории вероятностей и статистике) проверяет умение строить и исследовать простейшие математические модели, а также знание

учащимися элементов теории вероятностей. Задание содержит простую практико-ориентированную задачу на классическое определение вероятности.

Задание 14 проверяет умение исследовать характер поведения функции, заданной графически, без непосредственного вычисления производной. Ученики должны показать умение сравнивать скорости роста функции на разных промежутках.

Задание 19: задача на конструирование числа с заданными свойствами. Для ее решения нужно повторить с учениками признаки делимости. При решении задачи можно использовать разумный перебор. Важно отметить, что в ответе необходимо записать только одно из чисел, обладающих нужными свойствами.

Задание 20 демонстрационного варианта относится к разряду «задач на смекалку» и в таком виде присутствует в многочисленных сборниках по занимательной математике, решения таких заданий повышает мотивацию к изучению математики, развивает мышление учащихся.

Краткие общесистемные выводы и рекомендации по повышению уровня математической подготовки выпускников школы

Итоги ЕГЭ 2014 года позволяют выделить следующие ключевые проблемы неуспешности сдачи экзамена по математике:

- неумение читать и понимать текст условия задачи;
- несформированность базовых вычислительных навыков;
- неумение решать базовые задачи, требующие применения математики в жизненных ситуациях;
- несформированность наглядных геометрических представлений;
- несформированность навыков самоконтроля при решении математических задач.

Итоги ЕГЭ 2014 года позволяют выделить следующие ключевые проблемы, определяющие недостаточное количество выпускников, показывающих уровень подготовки, необходимый для успешного продолжения образования в профильных ВУЗах

- несформированность базовой логической культуры в основной школе;
- недостаточная алгебраическая подготовка в основной школе;
- недостаточное владение геометрическими знаниями, отсутствие графической культуры;
- неумение проводить анализ условия задачи, осуществлять поиск путей решения, неумение применять стандартные алгоритмы в измененной ситуации;
- неумение находить и исправлять ошибки в собственных рассуждениях и алгебраических преобразованиях и в вычислениях.

Указанные проблемы вызваны, в том числе, системными недостатками в преподавании математики, преодоление которых приведет общему повышению качества математической подготовки учащихся:

- отсутствие реального текущего контроля, системы выявления и ликвидации пробелов в осваиваемых математических компетенциях, начиная с 6 класса;
- отсутствие системной поддержки углубленного математического образования в 8–11 классах;
- отсутствие действительного профильного обучения в 10–11 классах;
- низкая эффективность уроков математики, особенно в 10–11 классе, в том числе из-за перегруженности программ материалом, к освоению которого фактически не готово значительное количество учащихся старшей школы;
- подмена освоения курса математики натаскиваем на формальные выполнения действий по алгоритмам;
- отсутствие мотивации к изучению математики у многих учащихся, отсутствие общественного понимания необходимости изучения всего объема текущего курса математики всеми учащимися, общественного консенсуса по вопросу содержания курса математики;
- недостаточная мотивация к изучению математики на углубленном и профильном уровне, резкое сокращение количества классов, в которых математика преподается в объеме более 4 часов в неделю;

- отсутствие во многих регионах системной работы по развитию математического таланта учащихся;
- недостаточная квалификация педагогов, в том числе предметная (неумение решать задачи), неумение использовать дистанционные формы работы.

Методические рекомендации для учителя по подготовке обучающихся к выполнению заданий базового уровня государственной итоговой аттестации по математике

Задание 1: арифметические действия с обыкновенными и десятичными дробями, с целыми отрицательными числами.

Найдите значение выражения $1,2 - 6,9 \cdot \frac{1}{3}$.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 80%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Для успешного выполнения такого типа заданий учащимся необходимо добиться правильного выполнения действий сложения, вычитания, умножения и деления десятичных дробей, обыкновенных дробей и отрицательных чисел. Обязательно нужно включать вычислительные примеры на два-три действия на порядок действий и совместные действия десятичных и обыкновенных дробей, положительных и отрицательных чисел. Такие задания нужно решать на каждом уроке. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 2: действия со степенями с целым показателем, стандартный вид числа.

Найдите значение выражения $\frac{0,24 \cdot 10^6}{0,6 \cdot 10^4}$.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 70%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Следует обратить внимание на то, что все правила действий со степенями даны в справочных материалах в разделе «свойства степени с целым показателем»:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0; n \text{ — натуральное.}$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; a^n a^m = a^{n+m}; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; (a^n)^m = a^{nm}.$$

По опыту известно, что действия с числами, представленными в стандартном виде, могут вызывать у учащихся затруднения, так как в традиционных курсах на эту тему отводится недостаточное количество времени. Для обучающихся со слабой математической подготовкой нужно особое внимание уделить по работе со справочными материалами. По возможности нужно на повторение этой темы выделить отдельные занятия, и задания такого типа нужно решать на каждом уроке. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 3 является к вычислительной задачей на проценты и части с естественной формулировкой.

Подходный налог в РФ составляет 13% заработной платы. Сколько рублей получает работник после уплаты подоходного налога с заработной платы в 20 000 рублей?

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 75%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Для успешного выполнения такого типа заданий учащимися необходимо добиться понимания понятий «процент» и «часть». К решению текстовых задач можно приступать после получения устойчивых вычислительных навыков. После подготовительной работы по нахождению процентов от числа (пропорции, процента как сотой части числа и основных типов задач на проценты) и нахождению части числа можно предлагать обучающимся задачи на вычисление процентов от числа, на части. Следует особо обратить внимание на такие понятия как «скидка», «наценка». По возможности нужно на повторение этой темы выделить отдельные занятия, и задания такого типа нужно включать в урочную и внеурочную работу. Для составления комплектов

заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задача 4 относится к задачам, связанными с работой с формулой.

Найдите m из соотношения $F = ma$, если $F = 84$ и $a = 12$.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 70%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

К решению задач такого типа можно приступать после получения устойчивых вычислительных навыков и повторения решений линейных уравнений.

Не следует добиваться от обучающихся со слабой математической подготовкой сначала выражения из формулы неизвестной переменной через известные, потом выполнение подстановки в полученную формулу и только потом вычисления. Имеет смысл сразу подставить данные значения переменных в формулу, а потом решать полученное уравнение с обязательной проверкой полученного результата.

Задания такого типа нужно включать в урочную и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задача 5 на нахождение значения выражения тригонометрического, иррационального, показательного (простейшего), логарифмического. В демонстрационном варианте одно из выражений дано тригонометрическое.

Найдите $\sin 390^\circ$.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 60% (задания с логарифмом, степенью, корнем ниже на 10%), выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Следует обратить внимание на то, что все материалы по тригонометрии даны в справочных материалах в разделах «тригонометрические функции на круге», «некоторые значения тригонометрических функций», поэтому можно

воспользоваться таблице для нахождения $\sin 30^\circ$, и останется записать $\frac{1}{2}$ в виде десятичной дроби. Наличие разделов «таблица квадратов целых чисел от 0 до 99» и «арифметический квадратный корень» могут помочь при решении примеров с корнем, «логарифм и свойства логарифмов» – при решении примеров с логарифмами, «свойства степени» – при выполнении действий со степенями.

С вычислительной стороны эта задача не представляет большой сложности.

Задания на нахождение значений выражений тригонометрических, иррациональных, логарифмических, показательных (на два-три шага) нужно включать в урочную и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 6 является вычислительной задачей с практическим контекстом.

Баночка йогурта стоит 4 рубля 60 копеек. Какое наибольшее количество баночек йогурта можно купить на 25 рублей?

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 85%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Для успешного решения задач такого типа потребуется не только владение вычислительными навыками, но и умение принимать решение об округлении числа с недостатком или с избытком в соответствии с условием задачи (математические правила округления чисел часто приводят к неверному описанию реальной ситуации).

Решение текстовых задач нужно включать в урочную и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий с округлением с недостатком и с округлением с избытком можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задача 7 на умение решать квадратные, простейшие иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

В демонстрационном варианте одно из уравнений дано квадратное.

Найдите отрицательный корень уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 75% (задания с логарифмом, степенью, корнем ниже на 10%), выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Следует обратить внимание на то, что все вспомогательные материалы даны в справочных материалах в разделах «корни квадратного уравнения», «тригонометрические функции на круге», «некоторые значения тригонометрических функций», «таблица квадратов целых чисел от 0 до 99», «арифметический квадратный корень», «логарифм и свойства логарифмов».

Например, формулы корней квадратного уравнения в справочных материалах

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0: \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

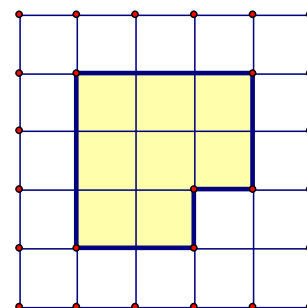
позволят обучающемуся со слабой математической подготовкой сосредоточиться не на воспроизведении формулы, а на ее применении. Вычислив корни, останется принять самостоятельно решение о включении нужного корня в ответ. С вычислительной стороны это задание требует особого контроля, поэтому имеет смысл проверять найденные корни подстановкой в уравнение.

Задания на решение квадратных, иррациональных, показательных, логарифмических уравнений (простейших) нужно включать в урочную и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 8 проверяет умение применять знания о геометрических объектах к решению практических задач.

В демонстрационном варианте представлен набор планиметрических задач на нахождение площади или периметра многоугольника, причем в форме простой практической задачи.

План местности разбит на клетки размером $10 \text{ м} \times 10 \text{ м}$. Найдите площадь участка, изображенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 75%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Следует обратить внимание на то, что все вспомогательные материалы даны в справочных материалах в разделе «площади многоугольников». Для обучающихся со слабой математической подготовкой первым шагом решения геометрической задачи должно быть построение чертежа. После этого следует определить необходимые данные для получения ответа на поставленный вопрос.

Задания на периметр и площади фигур нужно включать в урочную и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 9 проверяет знание возможных значений величин реальных объектов.

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ		ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ	
А)	рост ребёнка	1)	32 км
Б)	толщина листа бумаги	2)	30 м
В)	длина автобусного маршрута	3)	0,1 мм
Г)	высота жилого дома	4)	110 см

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатам апробации составляет не более 80%.

Для успешного выполнения этого задания учащиеся должны уметь переводить одни единицы измерения в другие (длина, площадь, объем, масса и т.д.). Часто для решения этой задачи достаточно расположить данные задачи в порядке возрастания (убывания) и соотнести величины и их возможные значения.

Задания на разумную оценку возможных величин реальных объектов необходимо включать в повседневную урочную работу и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно пользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 10 по теме «Теория вероятностей и статистика».

В чемпионате по прыжкам в воду участвуют 35 спортсменов: 7 из России, 12 из Китая, 9 из Японии и 7 из США. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется представителем России.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 60%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

Задание предполагает владение понятием равновероятных исходов эксперимента, навыками определения общего числа исходов эксперимента и выделения благоприятных исходов. Освоение понятия равновероятных исходов полезно проводить путем детального исследования стандартных моделей экспериментов – подбрасывание симметричной монеты, бросания игральной кости (кубика), бросания жребия в различных практических ситуациях. На этих же примерах целесообразно научиться определять общее число возможных исходов и подсчитывать число благоприятных исходов в зависимости от данных в условии задания.

Тема «Теории вероятностей и статистика» должна изучаться на отдельных уроках. Только после изучения данной темы задания можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 11 на проверку умений работать с диаграммами, графиками и таблицами данных.

В таблице показано распределение количества медалей на олимпийских играх в Сочи среди стран, занявших первые 10 мест по количеству золотых медалей. Сколько серебряных медалей у страны, имеющей наибольшее количество бронзовых медалей?

Место	Страна	Медали			
		Золотые	Серебряные	Бронзовые	Всего
1	Россия	13	11	9	33
2	Норвегия	11	5	10	26
3	Канада	10	10	5	25
4	США	9	7	12	28
5	Нидерланды	8	7	9	24

6	Германия	8	6	5	19
7	Швейцария	6	3	2	11
8	Беларусь	5	0	1	6
9	Австрия	4	8	5	17
10	Франция	4	4	7	15

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатами апробации составляет не более 90%.

Выполнение такого задания не основывается на применении арифметических действий с числами, но требует умения однократного считывания информации, представленной в виде графиков, диаграмм или таблиц. Поэтому подготовку обучающихся к выполнению таких заданий, как чтение столбиковых диаграмм (нахождение наибольшего или наименьшего, определение номера по убыванию или возрастанию) или нахождение наибольшего значения по графику, можно осуществлять на каждом уроке. Важно добиться стабильного выполнения задач такого типа.

Задания на умение работать с диаграммами, графиками и таблицами данных необходимо включать в урочную работу и внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно пользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 12 на проверку умений работать с таблицами данных и моделировать различные комбинации.

Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу из числа переводчиков, сведения по которым представлены в таблице.

Переводчик	Языки	Стоимость услуг (руб. в день)
1	Немецкий, испанский	7000
2	Английский, немецкий	6000
3	Английский	3000
4	Английский, французский	6000
5	Французский	2000
6	Испанский	4000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют 4-мя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 12000 руб. в день.

В ответе для собранной группы укажите список номеров переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатам апробации составляет не более 90%.

Для примера, покажем решение задачи.

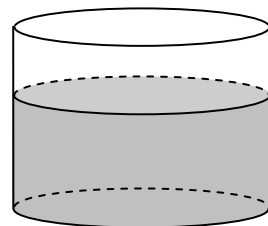
Решение. Выпишем все варианты групп переводчиков, содержащие все 4 языка с подсчетом стоимости услуг): 1, 4 (13 000 рублей), 1, 3, 5 (12 000 рублей), 1, 2, 5 (15 000 рублей), 2, 4, 6 (20 000 рублей), 2, 5, 6 (12 000 рублей). Из пяти вычисленных значений два удовлетворяют условию «не более 12000» – это варианты 1, 3, 5 и 2, 5, 6. В ответ надо записать или 135 (или любую перестановку этих цифр), или 256 (или любую перестановку). В бланк ответов нужно записать только одно число.

Выполнение этого задания основывается на правильном получении данных из таблицы, составлением нескольких наборов (с учетом выбора оптимального) и некоторым объемом вычислительной работы. Подготовка к выполнению заданий такого типа может осуществляться параллельно с решением вычислительных примеров и текстовых задач или после получения стабильных результатов при выполнении действий с числами.

Задания по этой теме следует включать и в урочную, и во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно пользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 13 проверяет умение решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (площадей, объемов).

В сосуд цилиндрической формы налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



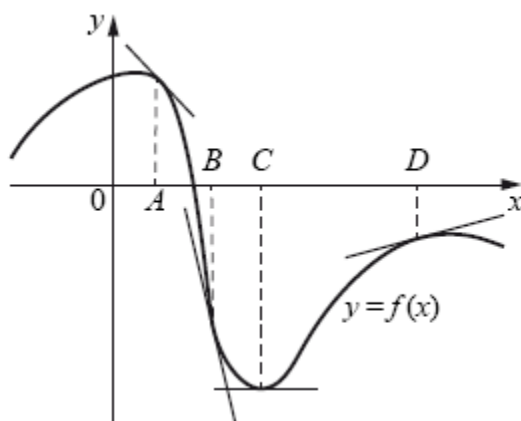
Выполняемость заданий такого типа по статистикам ЕГЭ, апробационных и диагностических работ, составляет не более 40%.

Необходимые для решения задачи формулы даны в справочных материалах. В ходе обучения и итогового повторения следует обращать внимание учеников не только на вычислительные формулы, но и на характер изменения площадей и объемов при изменении разных элементов фигуры (ребра куба, радиуса основания цилиндра и т.д.).

Задания по этой теме следует включать и в урочную работу и во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 14 проверяет умение исследовать характер поведения функции, заданной графически, без непосредственного вычисления производной.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, к которому проведены касательные в четырёх точках.



Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
А) <i>A</i>	1) 0
Б) <i>B</i>	2) -1
В) <i>C</i>	3) 0,3
Г) <i>D</i>	4) -5,5

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатами апробации составляет не более 75%.

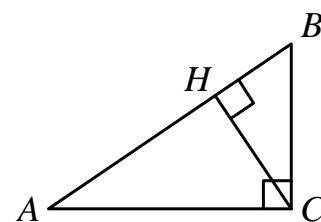
Ученики должны продемонстрировать умение сравнивать скорости изменения функции. Знаний «касательная образует тупой угол с положительным направлением с осью Ox – функция убывает» и «касательная образует острый угол с положительным направлением с осью Ox – функция возрастает» или «идешь в гору – функция возрастает», «идешь с горы – функция убывает» недостаточно для выполнения этого задания. От обучающегося уже требуется умение различать по положению касательных – в какой точке производная принимает значение -1 , а в какой $-5,5$.

Необходимые для выполнения задания материалы представлены в справочных материалах в разделе «геометрический смысл производной».

Тема «Геометрический смысл производной» должна изучаться на отдельных уроках. Только после изучения данной темы задания можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 15 – геометрическая (планиметрическая) задача.

В треугольнике ABC угол ACB равен 90° , $\cos A = 0,8$, $AC = 4$. Отрезок CH — высота треугольника ABC (см. рисунок). Найдите длину отрезка AH .



Выполняемость заданий такого типа по статистикам государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школ составляет не более 60%, выполняемость (получение правильного ответа) подтверждается статистиками проведенных диагностических работ и результатами апробации.

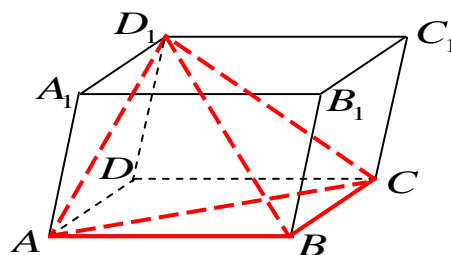
Необходимые для выполнения задания материалы представлены в справочных материалах в разделе «тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника».

Планиметрическая задача, выносимая на итоговую аттестацию, чаще всего представляет собой «двухходовую» планиметрическую задачу на основные факты курса планиметрии, за исключением тем «Векторы» и «Координаты».

Задания по этой теме можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 16 – геометрическая (стереометрическая) задача.

Объем параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ равен 15. Найдите объем пирамиды D_1ABC (см. рисунок).



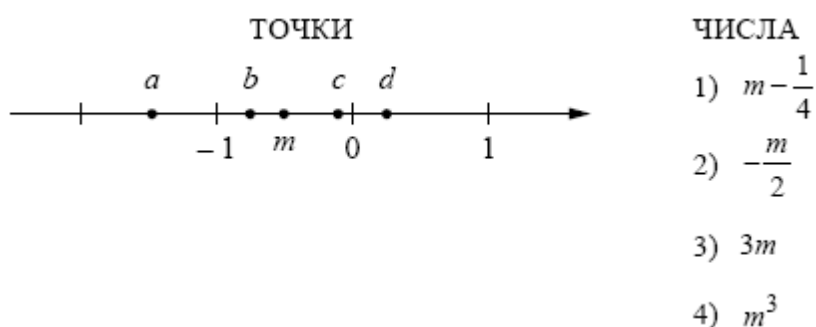
Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатами апробации составляет не более 30%.

Стереометрическая задача, выносимая на итоговую аттестацию, чаще всего проверяет умение решать простейшие стереометрические задачи на нахождение различных геометрических величин. Формулы для нахождения объема, площади поверхности даны в справочных материалах.

Задания по этой теме можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 17 проверяет умение сравнивать числа с помощью координатной прямой и решать неравенства.

На координатной прямой точками отмечены числа a , b , c , d и m . Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца.



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатами апробации составляет около 50%.

В этом задании проверяется умение сравнивать различные величины (в том числе иррациональные), не находя их точных значений, и располагать их на числовой прямой, а также решать неравенства. Действия с координатной прямой сложны для многих учащихся, поэтому стоит начинать с самых простых заданий «отметить точку с координатами (целыми, дробными, иррациональными) на координатной прямой», «сравнить числа (целые, дробные, иррациональные) с помощью координатной прямой» и т.д.

Задания по этой теме можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 18 проверяет умение устанавливать логические связи.

В городе Z в 2013 году мальчиков родилось больше, чем девочек. Мальчиков чаще всего называли Андрей, а девочек – Мария. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

Среди рождённых в 2013 году в городе Z:

- 1) девочек с именем Мария больше, чем с именем Светлана.
- 2) мальчиков с именем Николай больше, чем с именем Аристарх.
- 3) хотя бы одного из родившихся мальчиков назвали Андреем.
- 4) мальчиков с именем Андрей больше, чем девочек с именем Мария.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатам апробации составляет менее 50%.

Задания такого типа проверяют сформированность у обучающихся общей логической культуры. Для получения логической цепочки не требуется применение вычислительных навыков. В ответе нужно записать одно число (с точностью до перестановки).

Задания по этой теме можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 19: задача на конструирование числа с заданными свойствами.

Приведите пример набора из четырёх натуральных чисел, произведение которых равно 60, а сумма 25.

В ответе запишите числа через точку с запятой.

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатам апробации составляет около 40%.

Для решения такого типа нужно повторить с обучающимися разложение числа на множители, для решения других задач нужны признаки делимости. При решении задачи можно использовать разумный перебор. Важно отметить, что в ответе необходимо записать только одно из чисел, обладающих нужными свойствами.

Задания по этой теме можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу. Для составления комплектов заданий можно воспользоваться материалами открытого банка математических заданий.

Задание 20 – задача на «смекалку».

Улитка за день залезает вверх по дереву на 3 м, а за ночь спускается на 2 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка поднимется на вершину дерева?

Выполняемость заданий такого типа по статистикам проведенных диагностических работ и результатам апробации не превышает 30%.

Задачи такого типа присутствует в многочисленных сборниках по занимательной математике.

Задания по этой теме можно включать в урочную работу и нужно включать во внеурочную работу (обязательно составить комплекты заданий). Для составления комплектов заданий можно пользоваться материалами открытых банков математических заданий ОГЭ и ЕГЭ.